Unique groupe simple d'ordre 60

Proposition Soit G un groupe simple d'ordre 60.
Alors $G \simeq \mathcal{A}_5$.

On veut faire agir G sur un ensemble de cardinal 5, par exemple un quotient G/H où H est un sous-groupe de G d'indice 5.

▷ Supposons par l'absurde que l'on ait l'hypothèse (H) : il n'existe pas de sous-groupe strict H de G d'indice inférieur ou égal à 5.
On a :
$|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$

• Par le théorème de Sylow, $n_2 \equiv 1\ [2]$ et $n_2 \mid 15$. Donc $n_2 \in \{1, 3, 5, 15\}$.
De plus,
- $n_2 \neq 1$ car si $n_2 = 1$ alors le seul 2-Sylow de G est distingué : absurde car G est simple
- L'action de G sur $Syl_2(G)$ par conjugaison est transitive donc $n_2 = [G : Stab(P)]$ pour P un 2-Sylow.

Alors par (H), $n_2 = 15$.
- Soient P_1, P_2 deux 2-Sylow distincts de G et soit $g \in P_1 \cap P_2$.

P_1 et P_2 sont d'ordre 2^2 donc abéliens, alors $P_1 \cup P_2 \subset C(g)$
Or :
$|P_1 \cup P_2| > 4$
$4 = |P_1|$ divise $|C(g)|$ par Lagrange
$|C(g)|$ divise $|G| = 60$ par Lagrange
Donc : $|C(g)| \in \{12, 20, 60\}$ et par (H), $|C(g)| = 60$ i.e. $C(g) = G$.
Ainsi : $g \in Z(G)$ avec $Z(G)$ distingué dans G simple non abélien donc trivial.
D'où : $P_1 \cap P_2 = \{e\}$.
Alors :
$\#\{x \in G \mid ord(x) \in \{2, 4\}\} = 15 \times (4-1) = 45$

• Par le théorème de Sylow, $n_5 \equiv 1\ [5]$ et $n_5 \mid 12$. Donc $n_5 \in \{1, 6\}$.
De plus,
- $n_5 \neq 1$ car G est simple
- chaque 5-Sylow est cyclique donc les 5-Sylow sont tous distincts.

Ainsi :
$\#\{x \in G \mid ord(x) = 5\} = 6 \times (5-1) = 24$
Alors : $|G| > 24 + 45 = 69$: absurde ! Donc (H) n'est pas vérifiée.

▷ Supposons qu'il existe un sous-groupe H non trivial de G d'indice inférieur ou égal à 4.
L'action de G sur G/H induit un morphisme non trivial $\Phi : G \longrightarrow S_{[G:H]}$.
De plus,
$\operatorname{Ker} \Phi \triangleleft G$ donc $\operatorname{Ker} \Phi = G$ i.e. Φ injectif
Or : $|G| = 60 > 24 = |S_4| \geq |S_{[G:H]}|$. Absurde !

▷ Ainsi, il existe H sous-groupe de G d'indice 5.
Alors, de manière analogue à ce qui précède, $\Phi : G \hookrightarrow S_5$.
Donc :
$G \simeq \operatorname{Im} \Phi$ sous-groupe d'indice 2 de S_5
i.e. $G \simeq \mathcal{A}_5$